Acta Sci. Math., 45 (1983), 33—50

О вычислении энтропийных функционалов и их минимумов в неопределённых проблемах продолжения

Д. З. АРОВ и М. Г. КРЕЙН

Посвящается академику Б. Секефальви-Надь к его семидесятилетию в знак глубокого уважения и самых лучших чувств

Введение

Для измеримых при $|\zeta|=1$ матриц-функций (сокращённо — м.-ф.) $f(\zeta)$ порядка $m\times n$, таких, что $f^*(\zeta)f(\zeta)\leqq I_n$ п. в. ($f\in K^{m\times n}$) в настоящей работе рассматриваются функционалы

$$(1)\qquad i(f;\ z)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\ln\det\left[I_n-f^*(\zeta)f(\zeta)\right]\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\,|d\zeta|\quad(|z|<1).$$

Функционал $i(f)\overset{\mathrm{def}}{=}i(f;0)$ имеет следующий энтропийный смысл. Условие $f^*f\leqq I_n$ равносильно неравенству

$$\begin{pmatrix} I_m & f \\ f^* & I_n \end{pmatrix}\geqq 0.$$

Поэтому [1] для f из $K^{m\times n}$ м.-ф. $f(e^{i\mu})$ можно интерпретировать как смешанную спектральную плотность $f_{\xi,\eta}(\mu)$ двух стационарных и стационарно-связанных гауссовских случайных процессов $\xi=\{\xi_i(k)\}_{i=1}^m$ и $\eta=\{\eta_j(k)\}_{j=1}^n$ с дискретным временем $k(\in\mathbf{Z})$ (размерностей m и n со спектральными плотностями $f_{\xi,\xi}(\mu)=$ $=I_m$ и $f_{\eta,\eta}(\mu)=I_n$*)). Согласно формуле Пинскера [2] величина $i(f)$ может быть проинтерпретирована как скорость передачи информации $i(\xi,\eta)$ одним из процессов ξ и η о другом. В силу этого функционалы $i(f;\ z)$ мы называем энтропийными.

Поступило 22 июля, 1982.

*) Последнее условие означает, что гауссовы случайные величины $\xi_i(k)$ (и $\eta_j(k)$) независимы при различных i (j) или k и имеют единичную дисперсию.

В настоящей статье вычисляются значения $i(f; z)$ и минимума $i(f; z)$ для решений $f(\zeta)$ следующей проблемы продолжения и других проблем, сводящихся к ней (задача Шура, би-касательная задача Неванлинны—Пика и др.).

Задача $N(m; n)$. Найти м.-ф. $f(\zeta)$ из $K^{m\times n}$ с заданной «главной частью» её разложения в ряд Фурье: $f(\zeta)\sim \sum_1^\infty \gamma_k\zeta^{-k}+\dots$.

Ещё в 1957 г. Нехари [3] в скалярном случае $(m=n=1)$ получил критерий разрешимости такой проблемы продолжения. Позже авторы совместно с В. М. Адамяном [4a] получили критерий того, когда множество $\mathfrak{A}$ решений этой проблемы содержит более одной функции и формулу (2), дающую в этом случае параметрическое описание множества $\mathfrak{A}$. Эти и другие результаты в дальнейшем были обобщены на случай, когда значениями $f(\zeta)$ являются матрицы-операторы, действующие из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^m$ [4c] (определённая часть результатов сохранила силу и на случай операторов в бесконечномерных гильбертовых пространствах).

В этот же период стало ясно, что к задаче $N(m; n)$ легко сводится ряд интерполяционных задач таких, как задача Неванлинны—Пика, Шура, Каратеодори—Фейера и др. и их матричные обобщения, а также появившаяся к тому моменту задача Сарасона [5]. Один из авторов (М. Г. Крейн) совместно с Ф. Мелик-Адамяном выполнил исследование [6], в котором был рассмотрен матрично-континуальный аналог задачи $N(n; n)$ и установлена связь такой задачи с задачей рассеяния для канонических систем.

Таким образом, имеется довольно широкий круг задач, в которых в так называемом вполне неопределённом случае описание решений получается по формуле (2). В основу вычисления энтропийных функционалов $i(f; z)$ и их минимума для решений $f(\zeta)$ задачи $N(m; n)$ в настоящей работе положена именно эта формула.

В нашей заметке [7] сформулированы полученные на таком же пути аналогичные результаты для родственных задач продолжения в классе голоморфных при $|z|<1$ м.-ф. $f(z)$ с $\operatorname{Re} f(z)\geqq 0$, где вместо $I_n-f^*(\zeta)f(\zeta)$ рассматривается $\operatorname{Re} f(\zeta)$ $(|\zeta|=1)$. После опубликования этой заметки авторам стали известны статьи P. Dewild'а и H. Dym'а [8], где, в частности, на том же пути применения формулы пописания всех решений задачи указано решение с минимальной энтропией для специальной задачи продолжения. Статья [8b] передана в печать в один и тот же день с нашей заметкой [7] и в ней рассмотрена задача вычисления минимума энтропии для матрично-значной касательной проблемы Неванлинны—Пика с конечным числом узлов интерполяции. Она явилась дальнейшим развитием предыдущей работы тех же авторов [8a], где была рассмотрена такая задача в скалярном случае.

За недостатком места мы не имеем возможности подробно остановиться на связях, существующих между результатами настоящей статьи и нашей заметки [7], где, кстати, указана дополнительная литература, имеющая отношение к рассматриваемому циклу исследований. Отметим только, что настоящая статья является подробным раскрытием содержания п. 5 заметки [7]. Развёрнутое изложение остальной части заметки [7] будет нами дано в другом месте.

1. Некоторые положения об энтропийных функционалах

1. Напомним, что через $K^{m\times n}$ обозначается класс измеримых при $|\zeta|=1$ матриц-функций $f(\zeta)$ порядка $m\times n$ с $\|f(\zeta)\|\leqq 1$ $(f^*(\zeta)f|\zeta|\leqq I_n)$ п. в. Через $\mathbf{B}^{m\times n}$ обозначим класс голоморфных при $|z|<1$ м.-ф. $\mathscr{E}(z)$ порядка $m\times n$ с $\|\mathscr{E}(z)\|\leqq 1$. По теореме Фату для $\mathscr{E}(z)$ из $\mathbf{B}^{m\times n}$ существует п.в. при $|\zeta|=1$ граничное значение $\mathscr{E}(\zeta)(=\lim\limits_{r\uparrow 1}\mathscr{E}(r\,\zeta))$. Для м.-ф. $\mathscr{E}(\zeta)$ имеем $\mathscr{E}(\zeta)\in K^{m\times n}$ и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|\zeta|=1}\|\mathscr{E}(\zeta)\| \doteq \sup_{|z|<1}\|\mathscr{E}(z)\|\,(=\|\mathscr{E}\|_\infty).$$

Переходом от $\mathscr{E}(z)$ к $\mathscr{E}(\zeta)$ осуществляется естественное вложение $\mathbf{B}^{m\times n}$ в $K^{m\times n}$.

В этом параграфе центральным объектом будет семейство $\mathfrak{A}(A)=\{f_{\mathscr{E}}\colon \mathscr{E}\in\mathbf{B}^{m\times n}\}$ м.-ф. $f_{\mathscr{E}}(\zeta)$ из $K^{m\times n}$, являющееся образом $\mathbf{B}^{m\times n}$ при инъективном дробно-линейном преобразовании

$$f_{\mathscr{E}}(\zeta)=[a_{11}(\zeta)\mathscr{E}(\zeta)+a_{12}(\zeta)][a_{21}(\zeta)\mathscr{E}(\zeta)+a_{22}(\zeta)]^{-1},\quad \mathscr{E}\in\mathbf{B}^{m\times n}, \tag{2}$$

переводящем сжимающие матрицы $\mathscr{E}$ $(\|\mathscr{E}\|\leqq 1)$ в м.-ф. $f_{\mathscr{E}}(\zeta)$ из $K^{m\times n}$ и изометрические матрицы $\mathscr{E}$ $(\mathscr{E}^*\mathscr{E}=I_n)$ в изометрическизначные м.-ф. $f_{\mathscr{E}}(\zeta)$ (предполагается, что $n\leqq m$). Известно [9, 10], что дробно-линейное преобразование является таковым, когда его измеримая м.-ф. коэффициентов $A(\zeta)=[a_{ik}(\zeta)]_1^2$ умножением на некоторую измеримую скалярную функцию может быть сделана j-унитарной с

$$j=\begin{pmatrix} I_m & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что уже сама матрица $A(\zeta)$ является j-унитарной, т. е. $A^*(\zeta)jA(\zeta)=j$ п. в., $|\zeta|=1$. Поблочная запись этого равенства означает, что

$$\begin{gathered} a_{11}^*(\zeta)a_{11}(\zeta)-a_{21}^*(\zeta)a_{21}(\zeta)=I_m,\quad a_{11}^*(\zeta)a_{12}(\zeta)-a_{21}^*(\zeta)a_{22}(\zeta)=0,\\ a_{12}^*(\zeta)a_{12}(\zeta)-a_{22}^*(\zeta)a_{22}(\zeta)=-I_n. \end{gathered} \tag{3}$$

Так как вместе с $A(\zeta)$ является j-унитарной и матрица $A^*(\zeta)$, то из системы равенств (3) вытекает:

$$a_{21}(\zeta)a_{21}^*(\zeta)-a_{22}(\zeta)a_{22}^*(\zeta)=-I_n.$$

Отсюда видно, что матрица $a_{22}(\zeta)$ обратима, так что можно определить

$$\chi(\zeta) \overset{\text{def}}{=\!=} -a_{22}^{-1}(\zeta)a_{21}(\zeta), \tag{4}$$

и что для м.-ф. $\chi(\zeta)$ имеем

$$a_{22}^{-1}(\zeta)[a_{22}^{-1}(\zeta)]^* = I_n - \chi(\zeta)\chi^*(\zeta), \tag{5}$$

$$i(\chi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \ln|\det a_{22}(\zeta)|\,|d\zeta|. \tag{6}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что м.-ф. $\chi(\zeta)$ удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

(!) $\qquad$ 1) $\chi \in \mathbf{B}^{n\times m}$, $\qquad$ 2) $i(\chi) < \infty$.

Во всех представляющих интерес конкретных задачах, приводящих к семейству $\mathfrak{A}(A)$, м.-ф. $\chi(\zeta)$ удовлетворяет условиям (!). Напоминаем, что включение $\chi \in \mathbf{B}^{n\times m}$ означает, что $\chi(\zeta)$ — граничное значение м.-ф. $\chi(z)$ из $\mathbf{B}^{n\times m}$.

2. Теорема 1. *Пусть* $A(\zeta) = (a_{ik}(\zeta))_1^2$ — *м.-ф., принимающая j-унитарные значения п.в. при* $|\zeta| = 1$, *и пусть определённая по формуле* (4) *м.-ф.* $\chi(\zeta)$ *удовлетворяет условиям* (!). *Тогда для м.-ф.* $f_{\mathscr{E}}$ *из семейства* $\mathfrak{A}(A)$, *определённых по формуле* (2), *имеем:*

$$i(f_{\mathscr{E}}) = i(\chi) + i(\mathscr{E}) + \ln|\det[I - \chi(0)\mathscr{E}(0)]|. \tag{7}$$

В $\mathfrak{A}(A)$ *существует и притом единственная м.-ф.* $f_{0;\min}(\zeta)$, *на которой функционал* $i(f)$ *принимает наименьшее значение. М.-ф.* $f_{0;\min}(\zeta)$ *получается по формуле* (2) *при постоянной м.-ф.* $\mathscr{E}(\zeta) = \chi^*(0)$, *так что*

$$i(f_{0;\min}) = i(\chi) + (1/2)\ln\det[I_n - \chi(0)\chi^*(0)]. \tag{8}$$

Если, в частности, $\chi(0) = 0_{m\times n}$, то: $f_{0;\min} = a_{12}\,a_{22}^{-1}$,

$$i(f_{\mathscr{E}}) = i(\chi) + i(\mathscr{E}), \quad i(f_{0;\min}) = i(\chi). \tag{9}$$

Доказательство. Пользуясь системой равенств (3), получаем

$$\begin{aligned} &I_n - f_{\mathscr{E}}^*(\zeta)f_{\mathscr{E}}(\zeta) = \\ &= [a_{22}^{-1}(\zeta)]^*\{[I_n - \chi(\zeta)\mathscr{E}(\zeta)]^{-1}\}^*[I_n - \mathscr{E}^*(\zeta)\mathscr{E}(\zeta)](I_n - \chi(\zeta)\mathscr{E}(\zeta)]^{-1}a_{22}^{-1}(\zeta). \end{aligned} \tag{10}$$

Для $\chi(\in B^{n\times m})$ условие $i(\chi) < \infty$ равносильно следующему

$$\int\limits_{|\zeta|=1} \ln(1 - \|\chi(\zeta)\|)|d\zeta| > -\infty.$$

Поэтому $\|\chi(\zeta)\| < 1$ п. в. Из принципа максимума для м.-ф. из $\mathbf{B}^{n\times m}$ вытекает, что $\|\chi(z)\| < 1$ при $|z| < 1$. Поэтому для любой м.-ф. $\mathscr{E}(z)$ из $\mathbf{B}^{m\times n}$ определена и голоморфна при $|z|<1$ м.-ф. $[I_n-\chi(z)\mathscr{E}(z)]^{-1}$. Более того, $I_n-\chi(z)\mathscr{E}(z)$ — внешняя м.-ф. (см., например, [11], лемма 3.1), т. е.

$$\ln|\det[I_n-\chi(0)\mathscr{E}(0)]| = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\ln|\det[I_n-\chi(\zeta)\mathscr{E}(\zeta)]|\,|d\zeta|.$$

Это равенство вместе с (6) и (10) дают (7). Остаётся показать, что величина

$$i(\mathscr{E})+\ln|\det[I_n-\chi(0)\mathscr{E}(0)]| \quad (\mathscr{E}\in\mathbf{B}^{m\times n})$$

принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда $\mathscr{E}(\zeta)\equiv\chi^*(0)$. Это очевидно, когда $\chi(0)=0_{n\times m}$, ибо $i(\mathscr{E})\geqq 0$ и $i(\mathscr{E})=0$, если $\mathscr{E}(\zeta)\equiv 0_{m\times n}$ и только в этом случае. Пусть $\chi(0)\neq 0_{n\times m}$. Тогда рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$\mathscr{E}_1(\zeta) = [\mathring{a}_{11}\mathscr{E}(\zeta)+\mathring{a}_{12}][\mathring{a}_{21}\mathscr{E}(\zeta)+\mathring{a}_{22}]^{-1}$$

с постоянной j-унитарной матрицей коэффициентов $\mathring{A}=(\mathring{a}_{ik})_1^2$, отображающее $\mathscr{E}(\zeta)\equiv\chi^*(0)$ в $\mathscr{E}_1(\zeta)\equiv 0_{m\times n}$,

$$\mathring{A} = \begin{pmatrix} (I_m-\chi_0^*\chi_0)^{-1/2} & -(I_m-\chi_0^*\chi_0)^{-1/2}\chi_0^* \\ -(I_n-\chi_0\chi_0^*)^{1/2}\chi_0 & (I_n-\chi_0\chi_0^*)^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad \chi_0=\chi(0).$$

Применяя для семейства $\mathfrak{A}(\mathring{A})$ уже доказанную формулу (7), получаем:

$$i(\mathscr{E}_1) = i(\chi_0)+i(\mathscr{E})+\ln|\det[I_n-\chi(0)\mathscr{E}(0)]|,$$

где $\chi_0(\zeta)\equiv\chi_0=\chi(0)$. Таким образом, равенство (7) можно переписать в виде

$$i(f_{\mathscr{E}}) = i(\chi)+i(\mathscr{E}_1)-i(\chi_0).$$

Остаётся заметить, что $i(\mathscr{E}_1)\geqq 0$ и $i(\mathscr{E}_1)=0$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{E}_1(\zeta)\equiv 0$, т. е. когда $\mathscr{E}(\zeta)\equiv\chi^*(0)$. При такой м.-ф. $\mathscr{E}(\zeta)$ получается $f_{0;\min}(\zeta)$ с $i(f_{0;\min})=i(\chi)-i(\chi_0)$, что равносильно формуле (8). Теорема доказана.

Замечание 1. Нетрудно показать, что каково бы ни было число c, большее, чем $i(f_{0;\min})$, существует постоянная м.-ф. $\mathscr{E}(\zeta)$ такая, что $i(f_{\mathscr{E}})=c$.

3. Для $f\in K^{m\times n}$ и $|z|<1$ рассмотрим функционал $i(f;z)$, определённый по формуле (1). Очевидно, что если $f\in K^{m\times n}$, то $f_z(\zeta)\overset{\text{def}}{=}f\left(\dfrac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right)$ — м.-ф. из $K^{m\times n}$ и $i(f_z)(=i(f_z;0))=i(f;z)$. Положим:

$$A_z(\zeta) = A\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right), \quad \chi_z(\zeta) = \chi\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right), \quad f_{\mathscr{E},z}(\zeta) = f_{\mathscr{E}}\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right).$$

Тогда $\chi_z(0)=\chi(z)$, $i(\chi_z)=i(\chi;z)$, $i(f_{\mathscr{E},z})=i(f_{\mathscr{E}};z)$ и, применяя теорему 1 к семейству $\mathfrak{A}(A_z)=\{f_{\mathscr{E},z}\}$, получаем, что справедлива

Теорема 2. *Пусть м.-ф.* $A(\zeta)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда при каждом фиксированном* z $(|z|<1)$:

1) *для м.-ф.* $f_{\mathscr{E}}$ *из* $\mathfrak{A}(A)$ *имеем*

$$i(f_{\mathscr{E}};\ z) = i(\chi;\ z) + i(\mathscr{E};\ z) + \ln|\det[I_n - \chi(z)\mathscr{E}(z)]|; \tag{11}$$

2) *в* $\mathfrak{A}(A)$ *существует единственная м.-ф.* $f_{z,\min}(\zeta)$, *на которой функционал* $i(f;z)$ *принимает наименьшее значение;*

3) *м.-ф.* $f_{z,\min}(\zeta)$ *получается по формуле* (2) *при постоянной м.-ф.* $\mathscr{E}(\zeta)\equiv\equiv\chi^*(z)$, *так что*

$$i(f_{z,\min};\ z) = i(\chi;\ z) + (1/2)\ln\det[I_n - \chi(z)\chi^*(z)]. \tag{12}$$

Замечание 2. Если $\chi(z)$ — произвольная м.-ф. из $\mathbf{B}^{n\times m}$ такая, что $I_m - -\chi^*(\zeta)\chi(\zeta) > 0$ п. в. $(|\zeta|=1)$, то существует измеримая при $|\zeta|=1$ м.-ф. $A(\zeta) = =[(a_{ik}(\zeta)]_1^2$, принимающая j-унитарные значения п. в. и такая, что $a_{22}^{-1}(\zeta)a_{21}(\zeta) = = -\chi(\zeta)$. М.-ф. $A(\zeta)$ можно определить по $\chi(\zeta)$ точно так же, как при доказательстве основной теоремы 1 была определена $\mathring{A}$ по χ_0. Из теоремы 2 следует, что при $|z|<1$

$$-\frac{1}{2}\ln\det[I_m - \chi^*(z)\chi(z)] \leqq -\frac{1}{4\pi}\int_{|\zeta|=1}\ln\det[I_m - \chi^*(\zeta)\chi(\zeta)]\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}|d\zeta|.$$

Это неравенство означает, что в левой его части стоит субгармоническая функция (впрочем, в этом можно убедиться и непосредственно). В правой части неравенства стоит её наилучшая гармоническая мажоранта. Согласно теореме 2, разность между наилучшей гармонической мажорантой субгармонической при $|z|<1$ функции $-(1/2)\ln\det[I_m-\chi^*(z)\chi(z)]$ и самой этой функцией имеет теоретико-информационный смысл: она равна наименьшему значению величины $i(f;z)$ $\big((=i(f_z)\big)$, когда f пробегает множество $\mathfrak{A}(A)$.

2. Матричное обобщение энтропийного неравенства

1. Как известно, для f из $K^{m\times n}$ условие $i(f)<\infty$ является необходимым и достаточным для существования внешней м.-ф. ψ_f такой, что

$$\psi_f^*(\zeta)\psi_f(\zeta) = I_n - f^*(\zeta)f(\zeta) \quad \text{п. в.} \quad (|\zeta|=1)$$

$$\left(\psi_f\in\mathbf{B}^{m\times n},\ \ln|\det\psi_f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\ln|\det\psi_f(\zeta)||d\zeta|\right).$$

М.-ф. ψ_f определяется по f с точностью до постоянного левого унитарного множителя, а при нормировке $\psi_f(0)>0$ — однозначно. Очевидно, что $i(f)=$

$= -\ln|\det\psi_f(0)|$. Поскольку предполагается, что $i(\chi)<\infty$, то существует $\psi_\chi(z)$. Из равенства (5) следует, что

(13) $$a_{22}(\zeta) = b(\zeta)\varphi^{-1}(\zeta),$$

где $b(\zeta)$ — унитарно-значная м.-ф., а $\psi(z)$ — внешняя м.-ф. такая, что

(14) $$\varphi(\zeta)\varphi^*(\zeta) = I_n-\chi(\zeta)\chi^*(\zeta).$$

Имеем: $i(\chi)=-\ln|\det\psi_\chi(0)|=-\ln|\det\psi(0)|$. Совершая замену переменной $\zeta\mapsto(\zeta+z)/(1+\bar{z}\zeta)$, получаем:

(15) $$i(f;\, z) = -\ln|\det\psi_f(z)|,\quad i(\chi;\, z) = -\ln|\det\varphi(z)|$$

Введём в рассмотрение м.-ф. $B_0(z)$:

(16) $$B_0(z)\stackrel{\text{def}}{=}\varphi^*(z)[I_n-\chi(z)\chi^*(z)]^{-1}\varphi(z).$$

Тогда равенство (12) можно записать в виде

$$-\ln|\det\psi_{f_z,\min}(z)| = -(1/2)\ln\det B_0(z)$$

так что для $f_{\mathscr{E}}$ из $\mathfrak{A}(A)$ имеем:

(17) $$\ln\det[\psi^*_{f_{\mathscr{E}}}(z)\psi_{f_{\mathscr{E}}}(z)] \leqq \ln\det B_0(z).$$

В этой оценке достигается равенство точно тогда, когда $\mathscr{E}(\zeta)\equiv\chi^*(z)$.

2. Если предположить, что в представлении (13) функция $b(\zeta)$ является скалярной, то получается значительно более сильное утверждение, чем неравенство (17).

Теорема 3 (матричное неравенство). *Пусть для м.-ф. $A(\zeta)=[a_{ik}(\zeta)]_1^2$ выполняются условия теоремы* 1 *и её блок $a_{22}(\zeta)$ допускает факторизацию* (13) *со скалярной унимодулярной функцией $b(\zeta)$. Тогда при каждом фиксированном z ($|z|<1$) для семейства м.-ф. $f_{\mathscr{E}}(\zeta)$, определённых по формуле* (2), *выполняется неравенство*

(18) $$\psi^*_{f_{\mathscr{E}}}(z)\psi_{f_{\mathscr{E}}}(z) \leqq B_0(z),$$

где $B_0(z)$ определяется по формуле (16). *Знак = здесь достигается точно тогда, когда $\mathscr{E}(\zeta)\equiv\chi^*(z)$.*

Доказательство. Из равенства (10), учитывая (в существенном) единственность решения задачи факторизации неотрицательно-значной м.-ф. в классе внешних м.-ф. и то, что согласно условию теоремы в представлении (13) функция $b(\zeta)$ является скалярной, получаем:

$$\psi_{f_{\mathscr{E}}}(z) = u_{\mathscr{E}}\psi_{\mathscr{E}}(z)[I_n-\chi(z)\mathscr{E}(z)]^{-1}\varphi(z),$$

где $u_{\mathscr{E}}$ — постоянная унитарная матрица. Докажем сначала утверждение теоремы для $z=0$. Если $\chi(0)=0_{n\times m}$, то имеем $\psi_{f_{\mathscr{E}}}(0)=u_{\mathscr{E}}\psi_{\mathscr{E}}(0)\psi(0)$, $B_0(0)=\varphi^*(0)\varphi(0)$ и остаётся учесть, что $\psi_{\mathscr{E}}^*(0)\psi_{\mathscr{E}}(0)\leqq I_n$ и $\psi_{\mathscr{E}}^*(0)\psi_{\mathscr{E}}(0)=I_n$ лишь когда $\mathscr{E}(\zeta)\equiv 0_{m\times n}(=\chi^*(0))$. Случай, когда $\chi(0)\neq 0_{n\times m}$, рассматривается так же, как в аналогичной ситуации в доказательстве теоремы 1. Для семейства $\mathfrak{A}(\mathring{A})$ м.-ф. $\mathscr{E}_1(\zeta)$ имеем

$$\psi_{\mathscr{E}_1}(z) = v_{\mathscr{E}}\psi_{\mathscr{E}}(z)[I_n-\chi(0)\mathscr{E}(z)]^{-1}[I_n-\chi(0)\chi^*(0)]^{1/2},$$

где $v_{\mathscr{E}}$ — постоянная унитарная матрица. Следовательно,

$$\psi_{f_{\mathscr{E}}}(0) = u_{\mathscr{E}}v_{\mathscr{E}}^*\psi_{\mathscr{E}_1}(0)[I_n-\chi(0)\chi^*(0)]^{-1/2}\varphi(0).$$

Остаётся здесь учесть, что $u_{\mathscr{E}}v_{\mathscr{E}}^*$ — унитарная матрица, $\psi_{\mathscr{E}_1}^*(0)\psi_{\mathscr{E}_1}(0)\leqq I_n$ и $\psi_{\mathscr{E}_1}^*(0)\psi_{\mathscr{E}_1}(0)=I_n$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{E}_1(\zeta)\equiv 0_{m\times n}$, т.е. когда $\mathscr{E}(\zeta)\equiv\chi^*(0)$. Утверждение теоремы для произвольной точки z ($|z|<1$) получается из уже доказанного для $z=0$ путём замены переменной: $\zeta\mapsto(\zeta+z)/(1+\bar{z}\zeta)$.

Замечание 3. Можно показать, что при выполнении условий теоремы 3 при каждом фиксированном z ($|z|<1$) для любой матрицы $c(z)$ такой, что $0<c(z)\leqq B_0(z)$ существует постоянная м.-ф. $\mathscr{E}(\zeta)\equiv\mathscr{E}_c$, при которой $\psi_{f_{\mathscr{E}_c}}^*(z)\psi_{f_{\mathscr{E}_c}}(z)=c(z)$.

3. Важным для приложений является случай, когда $a_{22}(\zeta)$ является граничным значением мероморфной при $|z|<1$ м.-ф. При этом такими же будут $a_{21}(\zeta)$ и м.-ф. $b(\zeta)$ в представлении (13), так что

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= a_{22}^{-1}(z)b(z), \quad \chi(z) = -a_{22}^{-1}(z)a_{21}(z),\\ B_0(z) &= b^*(z)[a_{22}(z)a_{22}^*(z)-a_{21}(z)a_{21}^*(z)]b(z).\end{aligned} \tag{19}$$

Пусть $A(z)=[a_{ik}(z)]_1^2$ — произвольная j-внутренняя м.-ф., т.е.: 1) $A(z)$ — мероморфная при $|z|<1$ м.-ф., 2) в каждой точке голоморфности при $|z|<1$ она принимает j-сжимающие значения $(A^*(z)jA(z)\leqq j)$, 3) она имеет j-унитарные граничные значения $A(\zeta)$ п. в.

Такой м.-ф. $A(z)$ отвечает дробно-линейное преобразование (2), инъективно отображающее $\mathbf{B}^{m\times n}$ в себя так, что внутренним м.-ф. $\mathscr{E}(z)$ $(\mathscr{E}\in\mathbf{B}^{m\times n}, \mathscr{E}^*(\zeta)\mathscr{E}(\zeta)=I_n$ п. в.$)$ отвечают внутренние м.-ф. $f_{\mathscr{E}}(z)$. Это свойство является характеристическим: произвольная мероморфная при $|z|<1$ м.-ф. $A(z)$, обладающая этим свойством, лишь мероморфным скалярным множителем отличается от j-внутренней м.-ф. [10].

Для j-внутренней м.-ф. $A(z)$ условия (!) выполняются автоматически. Действительно, вместе с $A(z)$ матрица $A^*(z)$ также является j-сжимающей. Поэтому:

$$-a_{22}(z)a_{22}^*(z)+a_{21}(z)a_{21}^*(z) \leqq -I_n.$$

Отсюда вытекает, что: $\chi \in \mathbf{B}^{n\times m}$, $a_{22}^{-1} \in \mathbf{B}^{n\times m}$. Из последнего включения следует, что правая часть в формуле (5) является конечной, т. е. $i(\chi) < \infty$. Из него также следует представление $a_{22}(\zeta)$ в виде (13), где $b^{-1}(z)$ — внутренняя м.-ф. Поэтому из теорем 2 и 3 вытекает

Теорема 4. *Пусть* $A(z) = [a_{ik}(z)]_1^2$ — *произвольная j-внутреняя м.-ф. Тогда для семейства* $\mathfrak{A}(A)$ *м.-ф.* $f_\varepsilon(z)$, *определяемых по формуле* (2), *справедливы утверждения теоремы* 2. *Если при этом в факторизации* (13) *блока* $a_{22}(z)$ *функция* $b(z)$ *является скалярной, то для* $\mathfrak{A}(A)$ *справедливы утверждения теоремы* 3.

3. Применение к задаче $N(m;\ n)$

1. Остановимся на применении результатов § 1—2 к задаче $N(m; n)$. Напомним некоторые положения, полученные в [4c] при исследовании задачи $N(m; n)$.

По коэффициентам $\gamma_k\ (k=1, 2, \ldots)$ заданной «главной части» $\sum_1^\infty \gamma_k \zeta^{-k}$ м.-ф. $f(\zeta)$ строится блочно-ганкелева матрица $\Gamma = [\gamma_{j+k-1}]_1^\infty$ и рассматривается определяемый ею ганкелев оператор $\mathbf{\Gamma}$, действующий из $l^2(\mathbf{C}^n)$ в $l^2(\mathbf{C}^m)$ по формуле:

$$\mathbf{\Gamma}\xi = \eta = \{\eta_j\}_1^\infty,\ \ \eta_j = \sum_1^\infty \gamma_{j+k-1}\xi_k,\ \ \xi = \{\xi_k\}_1^\infty.$$

Задача $N(m; n)$ имеет решение тогда и только тогда, когда $I - \mathbf{\Gamma}^*\mathbf{\Gamma} \geqq 0$ ($\|\mathbf{\Gamma}\| \leqq 1$). Если $\|\mathbf{\Gamma}\| < 1$, то множество $\mathfrak{A}$ описывается формулой (2), т. е. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(A)$, где $A(\zeta) = [a_{ik}(\zeta)]_1^2$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и $a_{22}(\zeta)$ — внешняя м.-ф., так что в представлении $a_{22}(\zeta)$ в виде (13) имеем $b(\zeta) = I$, $a_{22}(\zeta) = \varphi^{-1}(\zeta)$. Такое же описание решений получается и в более общем, так называемом вполне неопределённом случае, когда для подпространства $\mathfrak{N}_1$ векторов $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty$ с $\xi_k = 0$ при $k > 1$ имеем

(20) $$\mathfrak{N}_1 \subset (I - \mathbf{\Gamma}^*\mathbf{\Gamma})^{1/2} l^2(\mathbf{C}^n).$$

Это включение равносильно следующему

$$\mathfrak{N}_2 \subset (I - \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}^*)^{1/2} l^2(\mathbf{C}^m),$$

где $\mathfrak{N}_2$ — подпространство в $l^2(\mathbf{C}^m)$ векторов $\eta = \{\eta_k\}_1^\infty$ с $\eta_k = 0$ при $k > 1$.

Для $A(\zeta) = [a_{ik}(\zeta)]_1^2$ имеем:

(21) $$a_{11}(\zeta) = \mathscr{P}_-(\zeta),\ a_{12}(\zeta) = \mathscr{Q}_-(\zeta),\ a_{21}(\zeta) = \mathscr{Q}_+(\zeta),\ a_{22}(\zeta) = \mathscr{P}_+(\zeta),$$

где $\mathscr{P}_\pm(\zeta)$ и $\mathscr{Q}_\pm(\zeta)$ вычисляются с помощью следующих процедур.

Пусть сначала $\|\mathbf{\Gamma}\|<1$. Обозначим через a положительную матрицу порядка $n\times n$ такую, что

$$((I-\mathbf{\Gamma}^*\mathbf{\Gamma})^{-1}\xi,\xi)=(a^{-1}\xi_1,\xi_1),\quad \xi=\{\xi_k\}_1^\infty\in\mathfrak{N}_1.$$

Соответствующий этой матрице оператор a в $\mathfrak{N}_1$ определяется по формуле

$$a=[P_{\mathfrak{N}_1}(I-\mathbf{\Gamma}^*\mathbf{\Gamma})^{-1}|\mathfrak{N}_1]^{-1/2}.$$

Рассмотрим оператор $\mathscr{P}=(I-\mathbf{\Gamma}^*\mathbf{\Gamma})^{-1}a$, действующий из $\mathbf{C}^n(=\mathfrak{N}_1)$ в $l^2(\mathbf{C}^n)$. Он определяется последовательностью матриц $\{p_k\}_1^\infty$ порядка $n\times n$: $\mathscr{P}\xi_1=\{p_k\xi_1\}_1^\infty$, $\xi_1\in\mathbf{C}^n$. Точно так же определяется оператор $\mathscr{Q}=\mathbf{\Gamma}(I-\mathbf{\Gamma}^*\mathbf{\Gamma})^{-1}a$ и вводится соответствующая последовательность матриц $\{q_k\}_1^\infty$ порядка $m\times n$. М.-ф. $\mathscr{P}_+(z)$ и $\mathscr{Q}_+(z)$ определяются по формулам

$$\mathscr{P}_+(\zeta)=\sum_1^\infty p_k\zeta^{k-1},\quad \mathscr{Q}_+(\zeta)=\sum_1^\infty q_k\zeta^k.$$

М.-ф. $\mathscr{P}_-(\zeta)$ и $\mathscr{Q}_-(\zeta)$ вычислятюся аналогично: следует в формулах, записанных для получения $\mathscr{P}_+(\zeta)$ и $\mathscr{Q}_+(\zeta)$, заменить $\mathbf{\Gamma}$ на $\mathbf{\Gamma}^*$, $\mathbf{\Gamma}^*$ — на $\mathbf{\Gamma}$ и ζ — на ζ^{-1}.

Если $\|\mathbf{\Gamma}\|=1$, то во вполне неопределённом случае м.-ф. $\mathscr{P}_\pm(\zeta)$ и $\mathscr{Q}_\pm(\zeta)$ получаются как пределы при $\varrho\uparrow 1$ м.-ф. $\mathscr{P}_\pm^{(\varrho)}(\zeta)$ и $\mathscr{Q}_\pm^{(\varrho)}(\zeta)$, отвечающих $\Gamma^{(\varrho)}=\varrho\Gamma$ $(0<\varrho<1)$ (см. [12]).

Итак, для семейства $\mathfrak{A}$ решений задачи $N(m;n)$ во вполне неопределённом случае применима теорема 2. Учитывая, что $a_{22}(\zeta)=\mathscr{P}_+(\zeta)$ — внешняя м.-ф., для $B_0(\zeta)$, определённой по формуле (19), получаем

$$B_0(z)=[\mathscr{P}_+(z)\mathscr{P}_+^*(z)-\mathscr{Q}_+(z)\mathscr{Q}_+^*(z)]^{-1}. \tag{22}$$

Для м.-ф. $\chi(z)$ имеем

$$\chi(z)=-\mathscr{P}_+^{-1}(z)\mathscr{Q}_+(z) \tag{23}$$

и, так как $\mathscr{Q}_+(0)=0$, то $\chi(0)=0$. Легко видеть, что $\mathscr{P}_+(0)=a^{-1}$, так что $B_0(0)=$ $=a^2$, где a — положительная матрица порядка $n\times n$, определяемая уже равенством

$$\|(I-\mathbf{\Gamma}^*\mathbf{\Gamma})^{-1/2}\xi\|^2=\|a^{1/2}\xi_1\|^2,\quad \xi=\{\xi_k\}_1^\infty\in\mathfrak{N}_1.$$

Предложение. *Пусть задача $N(m;n)$ является вполне неопределённой, т. е. для неё выполняется условие* (20), *и, значит множество всех её решений описывается формулой* (2), *где м.-ф. $A(\zeta)=[a_{ik}(\zeta)]_1^2$ вычисляется по формулам* (21). *Тогда для всех решений $f_{\mathscr{E}}(\zeta)$ этой задачи справедливо матричное неравенство* (18), *где $B_0(z)$ и $\chi(z)$ определяются по формулам* (22) *и* (23) *и в* (18) *имеем место знак равенства тогда и только тогда, когда $\mathscr{E}(\zeta)\equiv\chi^*(z)$. При нормировке $\psi_f(0)>0$, в частности, для всех решений $f_{\mathscr{E}}(\zeta)$:*

$$\psi_{f_{\mathscr{E}}}(0)\leqq a,\quad i(f_{\mathscr{E}})\geqq-\ln\det a,$$

причём равенства здесь имеют место тогда и только тогда, когда $\mathscr{E}(\zeta)\equiv 0$, *т. е. когда* $f_{\mathscr{E}}(\zeta)=\mathscr{Q}_-(\zeta)\mathscr{P}_+^{-1}(\zeta)$.

2. К задаче $N(m;\, n)$ сводятся задачи Шура, Неванлинны—Пика и другие. Напомним, что в задаче Шура требуется описать множество $\mathfrak{A}$ всех м.-ф. $f(z)$ класса $\mathbf{B}^{m\times n}$, имеющих заданные первые p коэффициентов $\{a_k\}_0^{p-1}$ разложения $f(z)$ в ряд Маклорена

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_{p-1}z^{p-1}+\ldots.$$

Задача Шура сводится к задаче $N(m;n)$ рассмотрением граничных значений м.-ф. $z^{-p}f(z)$. При этом получаем $\gamma_k=a_{p-k}$ при $1\leqq k\leqq p$ и $\gamma_k=0$ при $k>p$. Для такой задачи $N(m;\,n)$ будем иметь $p_k=0$ и $q_k=0$ при $k>p$, так что $\mathscr{P}_+(z)$ и $\mathscr{Q}_+(z)$ — многочлены с матричными коэффициентами степени не выше $p-1$ и p соответственно. В рассматриваемом случае вместо бесконечной блочно-ганкелевой матрицы Γ в формулах для $\mathscr{P}_\pm(z)$ и $\mathscr{Q}_\pm(z)$ можно писать конечные блочно-ганкелевые матрицы Γ_p,

$$\Gamma_p=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 \ldots \gamma_p\\ \gamma_2 & \gamma_3 \ldots 0\\ \ldots & \ldots\ldots\\ \gamma_p & 0\ \ldots 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{p-1} & a_{p-2}\ldots a_0\\ a_{p-2} & a_{p-3}\ldots 0\\ \ldots & \ldots\ldots\\ a_0 & 0\ \ \ldots 0\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\Gamma_p=VT_p$, где T_p — блочно-теплицева матрица, V — симметрическая ортогональная матрица:

$$T_p=\begin{pmatrix}\gamma_p & 0\ \ldots 0\\ \gamma_{p-1} & \gamma_p\ldots 0\\ \ldots & \ldots\ldots\\ \gamma_1 & \gamma_2\ldots\gamma_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0 & 0\ \ \ldots 0\\ a_1 & a_0\ \ \ldots 0\\ \ldots & \ldots\ldots\\ a_{p-1} & a_{p-2}\ldots a_0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0 & 0\ldots 0 & I\\ 0 & 0\ldots I & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ I & 0\ldots 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $I-\Gamma_p^*\Gamma_p=I-T_p^*T_p$, $I-\Gamma_p\Gamma_p^*=V(I-T_pT_p^*)V$. М.-ф. $\mathscr{P}_-(z)$ и $\mathscr{Q}_-(z)$ — многочлены относительно z^{-1} с матричными коэффициентами, степени не выше $p-1$ и p, соответственно. Поэтому $z^p\mathscr{P}_-(z)$ и $z^p\mathscr{Q}_-(z)$ — многочлены относительно z степени не выше p.

Итак, задача Шура имеет решение тогда и только тогда, когда $I-T_p^*T_p\geqq 0$. Эту задачу назовём вполне неопределённой, если $I-T_p^*T_p>0$. В этом случае множество решений описывается по формуле (2), т. е. $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(A)$, где

$$A(z)=\begin{pmatrix}z^p\mathscr{P}_-(z) & z^p\mathscr{Q}_-(z)\\ \mathscr{Q}_+(z) & \mathscr{Q}_+(z)\end{pmatrix}.$$

М.-ф. $A(z)$ здесь является многочленом с матричными коэффициентами степени не выше p. Ниже будет показано, что она является j-внутренней. Многочлены $\mathscr{P}_+(z)$ и $\mathscr{Q}_+(z)$ получаются по блочно-теплицевой матрице T_p следующим образом. Рассматриваются матрицы X и Y порядков $mp\times mp$ и $np\times np$ соответственно, являющиеся решением системы

$$\begin{cases} X+T_pY=0,\\ T_p^*X+Y=I_n. \end{cases}$$

Пусть X_k и Y_k ($1\leqq k\leqq p$) их блоки порядков $m\times m$ и $n\times n$. Тогда $p_k=Y_kY_1^{-1/2}$, $q_k=X_{p-k+1}Y_1^{-1/2}$, так что

$$\mathscr{P}_+(z)=\sum_1^p Y_kY_1^{-1/2}z^{k-1},\quad \mathscr{Q}_+(z)=\sum_1^p X_{p-k+1}Y_1^{-1/2}z^k.$$

Подобным же образом определяются многочлены $z^p\mathscr{P}_-(z)$ и $z^p\mathscr{Q}_-(z)$.

3. Задача Шура является частным случаем следующей обобщённой задачи Неванлинны—Пика. Пусть заданы две внутрение м.-ф. $b_1(z)$ и $b_2(z)$ соответственно порядков $m\times m$ и $n\times n$. Требуется описать множество $\mathfrak{A}$ всех м.-ф. $f(z)$ класса $\mathbf{B}^{m\times n}$ таких, что $b_1^{-1}(z)f(z)b_2^{-1}(z)$ имеют граничные значения с заданной «главной частью» $\gamma(\zeta)$ разложения ряд Фурье:

$$\tilde{f}(\zeta)=b_1^{-1}(\zeta)f(\zeta)b_2^{-1}(\zeta)=\sum_1^\infty \gamma_k\zeta^{-k}+\ldots.$$

Для $\tilde{f}(\zeta)$ имеем задачу $N(m;n)$, у которой заданная главная часть $\gamma(\zeta)$ удовлетворяет условию: $b_1(\zeta)\gamma(\zeta)b_2(\zeta)$ имеет нулевую «главную часть», т. е. разлагается в ряд Фурье по неотрицательным степеням ζ. В задаче Шура имеем $b_1(z)=z^pI_m$, $b_2(z)=I_n$. Случай, когда $b_1(z)=b(z)I_m$, $b_2(z)=I_n$, где $b(z)$ — произвольная скалярная внутренняя функция, был ранее рассмотрен в [4b]. Если, в частности, $b(z)$ — произведение Бляшке с простыми нулями z_k ($|z_k|<1$, $1\leqq k<N\leqq+\infty$), то имеем задачу, к которой сводится задача Неванлинны—Пика для м.ф. $f(z)$ класса $\mathbf{B}^{m\times n}$ с узлами интерполяции z_k: описать множество $\mathfrak{A}$ м.-ф. $f(z)(\in\mathbf{B}^{m\times n})$ с заданными значениями $f_k=f(z_k)$ ($1\leqq k<N\leqq+\infty$) (при $N=+\infty$ предполагается, что $\sum_1^\infty(1-|z_k|)<\infty$). Как известно, впервые нескалярный вариант классической задачи Неванлинны—Пика, и даже не для м.-ф., а для оператор-функций, изучался методами теории расширения изометрических операторов в работе B. Sz.-Nagy и A. Korányi [13].

Если $b_2(z)=I_n$, а $b_1(z)$ — конечное или бесконечное матричное произведение Бляшке—Потапова [14], то имеем задачу, к которой сводится касательная задача Неванлинны—Пика, исследованная в работах [16]. Если же не только $b_1(z)$, но и $b_2(z)$ — произведения Бляшке—Потапова, то приходим к более общей задаче, нежели касательная (би-касательной задаче), в которой в интерполяционных данных одновременно фигурируют величины, связанные с $f(z)$ и $f^*(z)$.

В случае, когда обобщённая задача Неванлинны—Пика является вполне неопределённой, множество $\mathfrak{A}$ её решений описывается формулой (2), т. е. $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(A)$, где

$$A(\zeta)=\begin{pmatrix} b_1(\zeta) & 0 \\ 0 & b_2^{-1}(\zeta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathscr{P}_-(\zeta) & \mathscr{Q}_-(\zeta) \\ \mathscr{Q}_+(\zeta) & \mathscr{P}_+(\zeta)\end{pmatrix}.$$

М.-ф. $\mathscr{P}_\pm(\zeta)$ и $\mathscr{Q}_\pm(\zeta)$ определяются по $\gamma(\zeta)$ по указанным ранее формулам. Покажем, что рассматриваемая в этой задаче м.-ф. $A(\zeta)$ является граничным значением j-внутренней м.-ф. Действительно, $A(\zeta)$ принимает j-унитарные значения и

$$s_{11}(\zeta)\overset{\text{def}}{=}a_{11}(\zeta)-a_{12}(\zeta)a_{22}^{-1}(\zeta)a_{21}(\zeta)=b_1(\zeta)[\mathscr{P}_+^*(\zeta)]^{-1}\in\mathbf{B}^{m\times m},$$

$$s_{12}(\zeta)\overset{\text{def}}{=}a_{12}(\zeta)a_{22}^{-1}(\zeta)=f_0(\zeta)\in\mathbf{B}^{m\times n},$$

$$s_{21}(\zeta)\overset{\text{def}}{=}-a_{22}^{-1}(\zeta)a_{21}(\zeta)=-\mathscr{P}_+^{-1}(\zeta)\mathscr{Q}_+(\zeta)\in\mathbf{B}^{n\times m},$$

$$s_{22}(\zeta)\overset{\text{def}}{=}a_{22}^{-1}(\zeta)=\mathscr{P}_+^{-1}(\zeta)b_2(\zeta)\in\mathbf{B}^{n\times n}.$$

По основной лемме из [11] получаем, что $A(z)=[a_{ik}(z)]_1^2$ j-внутренняя м.-ф.

4. Континуальные аналоги

1. Будем теперь рассматривать вместо единичной окружности вещественную прямую, а вместо единичного круга — верхнюю полуплоскость.

Через $\mathbf{B}_+^{m\times n}$ обозначим класс голоморфных при $\operatorname{Im} z>0$ м.-ф. $\mathscr{E}(z)$ порядка $m\times n$ с $\|\mathscr{E}(z)\|\leq 1$ при $\operatorname{Im} z>0$. Для $\mathscr{E}(z)$ из $\mathbf{B}_+^{m\times n}$ существуют п. в. граничные значения $\mathscr{E}(x)=\lim\limits_{y\downarrow 0}\mathscr{E}(x+iy)$, $-\infty<x<+\infty$, причём $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{-\infty<x<+\infty}\|\mathscr{E}(x)\|=\sup\limits_{\operatorname{Im} z>0}\|\mathscr{E}(z)\|\,(=\|\mathscr{E}\|_\infty)$.

Замена переменной

$$z\mapsto(z-i)/(z+i), \tag{24}$$

отображающая замкнутую верхнюю полуплоскость на замкнутый единичный круг, биективно переводит $\mathbf{B}_+^{m\times n}$ на $\mathbf{B}^{m\times n}$, а класс $K_+^{m\times n}$ измеримых сжимающих на вещественной прямой м.-ф. $f(z)$ порядка $m\times n$ — на класс $K^{m\times n}$. При этом функционал $i(f;z)$, определённый по формуле (1), переходит в функционал

$$I(f;\,z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\det[I_n-f^*(x)f(x)]\,\frac{\operatorname{Im} z}{|x-z|^2}\,dx\quad(\operatorname{Im} z>0,\ f\in K_+^{m\times n}), \tag{1_+}$$

так что

$$I(f)\overset{\text{def}}{=}I(f;\,i)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\det[I_n-f^*(x)f(x)]\,\frac{dx}{1+x^2}. \tag{$1'_+$}$$

Для м.-ф. $A(x)=[a_{ik}(x)]_1^2$, принимающей п. в. на вещественной прямой j-унитарные значения, будем рассматривать

$$(6_+)\qquad \chi(x)=-a_{22}^{-1}(x)a_{21}(x)$$

и предполагать, что для м.-ф. $\chi(x)$ выполняются условия

$$(!_+)\qquad 1)\quad \chi\in \mathbf{B}_+^{n\times m},\qquad 2)\quad I(\chi)<\infty.$$

Путём замены переменной (24) из теоремы 2 получается

Теорема 2_+. *Пусть м.-ф. $A(x)=[a_{ik}(x)]_1^2$ принимает j-унитарные значения п. в. на вещественной прямой и м.-ф. $\chi(x)$, определённая по формуле* (6_+), *удовлетворяет условию* $(!_+)$. *Тогда справедливо утверждение, отличающееся от утверждения теоремы 2 лишь тем, что в нём следует писать вместо переменных ζ с $|\zeta|=1$ и z с $|z|<1$ переменные x с $\operatorname{Im} x=0$ и z с $\operatorname{Im} z>0$, вместо функционала $i(f;z)$ — функционал $I(f;\ z)$ и вместо класса $\mathbf{B}^{m\times n}$ — класс $\mathbf{B}_+^{m\times n}$.*

Аналогичным образом из теоремы 3 получается её континуальный аналог — теорема 3_+.

2. Теоремы 2_+ и 3_+ применимы, в частности, к задаче $N_+(m;n)$, являющейся континуальным аналогом задачи $N(m;n)$. При её формулировке в полной общности возникают дополнительные трудности, связанные с тем, что преобразование Фурье от ограниченной м.-ф. является обобщённой функцией медленного роста и приходится, таким образом, использовать определённые факты из теории обобщённых функций.

Во избежание этих трудностей ограничимся рассмотрением следующей задачи $N_+^0(m;n)$, являющейся по существу частным случаем задачи $N_+(m;n)$, однако важной тем, что она имеет прямое отношение к теории рассеяния канонического дифференциального уравнения вида

$$(25)\qquad J\frac{dY}{dr}=\lambda Y+V(r)Y\quad (0\leqq r<+\infty),\qquad J=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$$

с суммируемым потенциалом $V=V^*(\in L_1^{2n\times 2n}(0;\ +\infty))$ [6] и её решение опирается на теорию классических интегральных операторов.

Пусть задана суммируемая м.-ф. $\Gamma_0(\in L_1^{m\times n}(0;\ +\infty))$ порядка $m\times n$. Требуется описать множество $\mathfrak{A}$ всех м.-ф. $S(x)$ из $K_+^{m\times n}$ таких, что

$$S(x)=\int_0^{+\infty} e^{-ixt}\Gamma_0(t)\,dt+\Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — граничное значение некоторой ограниченной при $\operatorname{Im} z>0$ м.-ф. $\Phi(z)$.

Для формулировки условия разрешимости этой задачи $N_+^0(m; n)$ и описания множества $\mathfrak{A}$ рассматривается вполне непрерывный ганкелев оператор $\mathbf{\Gamma}_0$ в пространстве $L_2^{n\times 1}(0; \infty)$, определяемый по формуле

$$(\mathbf{\Gamma}_0\xi)(t) = \int_0^{+\infty} \Gamma_0(t+s)\xi(s)\,ds, \quad \xi \in L_2^{n\times 1}(0; \infty).$$

Задача $N_+^0(m; n)$ имеет решение тогда и только тогда, когда $I-\mathbf{\Gamma}_0^*\mathbf{\Gamma}_0 \geqq 0$. Она является вполне неопределённой, если $\|\mathbf{\Gamma}_0\|<1$. Именно к этому случаю при $m=n$ приводит задача рассеяния для канонической системы (25) с суммируемым потенциалом [6]. В этом и только этом случае существует решение задачи $S(x)$ с $\|S\|_\infty<1$.

Замечание 4. Для задачи $N_+^0(m; n)$ в множестве решений существуют такие $S(x)$, которые представимы в виде

$$S(x) = S_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\Gamma(t)\,dt,$$

где S_0 — постоянная матрица, а $\Gamma \in L_1^{m\times n}(-\infty; +\infty)$. Более того, $S(x)$ допускает указанное представление тогда и только тогда, когда соответствующая ей в формуле (2_+) параметрическая м.-ф. $\mathscr{E}(z)$ допускает представление

$$\mathscr{E}(z) = \mathscr{E}_0 + \int_0^{+\infty} e^{izt}\hat{\mathscr{E}}(t)\,dt, \quad \hat{\mathscr{E}} \in L_1^{m\times n}(0; \infty).$$

В частности, такими являются решения задачи $N_+^0(m; n)$, дающие минимум функционалов $I(S; z)$ $(\operatorname{Im} z>0)$, ибо для них соответвующие м.-ф. являются постоянными.

При выполнении условия $\|\mathbf{\Gamma}_0\|<1$ описание множества $\mathfrak{A}$ получается по формуле (2_+), отличающейся от (2) лишь тем, что ζ с $|\zeta|=1$ заменяется на x с $\operatorname{Im} x=0$, а $\mathbf{B}^{m\times n}$ — на $\mathbf{B}_+^{m\times n}$. Для м.-ф. $A(x)=[a_{ik}(x)]_1^2$ получаются формулы (21_+), отличающиеся от (21) тем, что ζ заменяется на x. Рассматриваемые в (21_+) м.-ф. $\mathscr{P}_+(x)$ и $\mathscr{Q}_+(x)$ определяются следующим образом:

$$\mathscr{P}_+(x) = I_n - \mathscr{F}_+\{\mathbf{I}-\mathbf{\Gamma}_0^*\mathbf{\Gamma}_0)^{-1}\mathbf{\Gamma}_0^*\Gamma_0\}(x),$$
$$\mathscr{Q}_+(x) = \mathscr{F}_+\{(\mathbf{I}-\mathbf{\Gamma}_0^*\mathbf{\Gamma}_0)^{-1}\Gamma_0^*\}(x).$$

Здесь использовано обозначение

$$\mathscr{F}_+\{G\}(x) = \int_0^{+\infty} e^{ixt}G(t)\,dt, \quad G \in L_1^{k\times n}(0; \infty).$$

М.-ф. $\mathscr{P}_-(x)$ и $\mathscr{Q}_-(x)$, рассматриваемые в (21_+), получаются по таким же формулам, что и $\mathscr{P}_+(x)$ и $\mathscr{Q}_+(x)$: следует в них заменить $\mathbf{\Gamma}_0$ на $\mathbf{\Gamma}_0^*$, $\mathbf{\Gamma}_0^*$ на $\mathbf{\Gamma}_0$, Γ_0 на

Γ_0^*, Γ_0^* на Γ и x на $-x$. Для получаемой в итоге м.-ф. $A(x)=[a_{ik}(x)]_1^2$ выполняются условия теорем 2_+ и 3_+; здесь $a_{22}^{-1}(x)=\mathscr{P}_+^{-1}(x)$ — внешняя м.-ф. класса $\mathbf{B}_+^{n\times n}$.

3. Точно так же, как ранее была решена задача Шура $S(m; n)$, сводящаяся к задаче $N(m; n)$, рассматривается её континуальный вариант — задача $S_+^0(m; n)$: описать все м.-ф. $F(z)$ из $\mathbf{B}_+^{m\times n}$ такие, что

$$F(z) = \int_0^T e^{izt}C(t)\,dt + e^{izT}\Phi(z),$$

где $C(t)(\in L_1^{m\times n}(0; T))$ — заданная м.-ф., а $\Phi(z)$ — ограниченная голоморфная при $\operatorname{Im} z>0$ м.-ф. Она сводится к задаче $N_+^0(m; n)$, поставленной для $S(x)=e^{-ixT}F(x)$ по заданной м.-ф. $\Gamma_0(t)$,

$$\Gamma_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t>T, \\ C(T-t) & \text{при} \quad 0<t<T. \end{cases}$$

Так как

$$\eta(t) = \mathbf{\Gamma}_0\xi = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad t>T \\ \displaystyle\int_0^{T-t} C(T-t-s)\xi(s)\,ds \quad \text{при} \quad 0<t<T, \end{cases}$$

то условие $I-\mathbf{\Gamma}_0^*\mathbf{\Gamma}_0 \geqq 0$ существования решения задачи можно переписать в виде $I-\mathbf{S}_T^*\mathbf{S}_T \geqq 0$, где $\mathbf{S}_T$ — теплицев оператор, действующий из $L_2^{n\times 1}(0; T)$ в $L_2^{m\times 1}(0; T)$, определяемый по формуле

$$(\mathbf{S}_T\xi)(t) = \int_0^t C(t-s)\xi(s)\,ds \quad (0 \leqq t \leqq T).$$

Условие полной неопределённости задачи $S_+^0(m; n)$ записывается в виде $I-\mathbf{S}_T^*\mathbf{S}_T>0$. Формулы для $\mathscr{P}_\pm(x)$ и $\mathscr{Q}_\pm(x)$ можно переписать, заменяя ганкелев оператор $\mathbf{\Gamma}_0$ теплицевым оператором $\mathbf{S}_T$. Описание всех решений $F(z)$ задачи $S_+^0(m; n)$ получается по формуле (2_+), в которой м.-ф. $A(z)=[a_{ik}(z)]_1^2$ — j-внутреняя при $\operatorname{Im} z>0$,

$$a_{11}(z) = e^{izT}\mathscr{P}_-(z), \quad a_{12}(z) = e^{izT}\mathscr{Q}_-(z),$$

$$a_{21}(z) = \mathscr{Q}_+(z), \quad a_{22}(z) = \mathscr{P}_+(z).$$

Все блоки $a_{ik}(z)$ в рассматриваемой задаче оказываются м.-ф. из $H_2^{r\times n}\ominus e^{izT}H_2^{r\times n}$ $(r=m, n)$ и поэтому это целые м.-ф. Таким образом $A(z)$ целая j-внутренняя м.-ф. и к ней применима теорема 4_+ — континуальный аналог теоремы 4.

Для задачи $S_+^0(m; n)$ справедливо замечание такое же, какое было сделано ранее для задачи $N_+^0(m; n)$.

Приведенные нами результаты об описании множества решений задач $N_+^0(m; n)$ и $S_+^0(m; n)$ заимствованы из рукописи М. Г. Крейна и Ф. Э. Мелик-Адамяна (где предполагалось $m=n$), краткое извлечение из которой опубликовано в работе [6]. Следует отметить, что работа [6] была первым матричным и притом континуальным аналогом работы [4a].

Литература

[1] Ю. А. Розанов, *Стационарные случайные процессы*, Физматгиз (Москва, 1963).

[2] М. О. Пинскер, Энтропия, скорость создания энтропии и энтропийная устойчивость гауссовских случайных величин и процессов, *ДАН СССР*, **133**:3 (1960), 531—534.

[3] Z. Nehari, On bounded bilinear form, *Ann. Math.*, **65**:1 (1957), 153—162.

[4a] В. М. Адамян, Д. З. Аров и М. Г. Крейн, Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщённые задачи Каратеодори—Фейера и И. Шура, *Функц. анализ и его прилож.*, **2**:4 (1968), 1—17.

[4b] ————, Об ограниченных операторах, коммутирующих с сжатием класса C_{00} единичного ранга неунитарности, *Функц. анализ и его прилож.*, **3**:3 (1969), 86—87.

[4c] ————, Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения, *Изв. АН Арм. ССР*, **VI**: 2—3 (1971), 87—112.

[5] D. Sarason, Generalized interpolation in H^∞, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127**: 2 (1967), 180—203.

[6] М. Г. Крейн и Ф. Э. Мелик-Адамян, Некоторые приложения теоремы о факторизации унитарной матрицы, *Функц. анализ и его прилож.*, **4**:4 (1970), 73—75.

[7] Д. З. Аров и М. Г. Крейн, Задача об отыскании минимума энтропии в неопределённых проблемах продолжения, *Функц. анализ и его прилож.*, **15**:2 (1981), 73—76.

[8a] P. Dewilde and H. Dym, Schur recursions, error formulas and convergence of rational estimations for stationary stochastic sequences, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **II-27**:4 (1981), 416—461.

[8b] ————, Lossless chain scattering matrices and optimum linear prediction: the vector case, *Circuit Theory and Applications*, **9** (1981), 135—175.

[9] М. Г. Крейн и Ю. Л. Шмульян, О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, *Матем. исследования*, **2**:3 (1967), 64—96.

[10a] Л. А. Симакова, О плюс-матрицах-функциях ограниченной характеристики, *Матем. исследования*, **9**:2 (1974), 149—171.

[10b] ————, О мероморфных плюс-матрицах-функциях, *Матем. исследования*, **10**:1 (1975), 287—292.

[11] Д. З. Аров, Реализация матриц-функций по Дарлингтону, *Изв. АН СССР, сер. матем.* **37**:6 (1973), 1299—1331.

[12] В. М. Адамян, Невырожденные унитарные сцепления полуунитарных операторов, *Функц. анализ и его прилож.*, **7**:4 (1973), 1—16.

[13a] B. Sz.-Nagy et A. Korányi, Relation d'un problème de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace Hilbertien, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7** (1956), 295—303.

[13b] ————, Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerung eines Problemkreises und der komplexen Funktionentheorie, *Acta Math.*, **100** (1958), 171—202.

[14] В. П. Потапов, Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций *Труды Московского матем. общ-ва*, **4** (1955), 125—137.

[15] И. В. Ковалишина и В. П. Потапов, Индефинитная метрика и проблема Неванлинны—Пика, *ДАН Арм. ССР*, **59** (1974), 17—22.

[16a] И. П. Федчина, Критерий разрешимости касательной проблемы Неванлинны—Пика, *Матем. исследования*, **4** (1972), 213—227.

[16b] ————, Описание решений касательной проблемы Неванлинны—Пика, *ДАН Арм. ССР*, **60**:1 (1975), 37—42.

[16c] ————, Касательная проблема Неванлинны—Пика с кратными точками, *ДАН Арм. ССР*, **60** (1975), 214—218.

[16d] ————, Задача Шура для вектор-функций, *Украинский матем. журн.*, **30**:6 (1978), 797—805.

(Д.З.А.)
ОДЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОДЕССА, СССР

(М.Г.К.)
ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ АН УССР
ОДЕССА, СССР